ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HỒNG KHUYÊN

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG ƯỚC LƯỢNG ĐA THỨC VÀ DÃY SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HỒNG KHUYÊN

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG ƯỚC LƯỢNG ĐA THỨC VÀ DÃY SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp
Mã số : 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề lượng giác là một phần quan trọng trong chương trình toán THPT. Các học sinh học lượng giác thường chưa cặn kẽ tư tưởng cũng như phương pháp tiếp cận và đặc biệt là khâu vận dụng kiến thức vào giải các bài toán trong đại số, giải tích và hình học. Trong hoạt động thực tiễn, có rất nhiều bài toán cần sự can thiệp của lượng giác để đo đạc, tính toán và mô phỏng. Vì vậy, chuyên đề lượng giác có vị trí rất đặc biệt trong toán học, không những như một đối tượng cần nghiên cứu mà còn là công cụ đắc lực trong đại số giải tích và hình học.

Trong các kì thi THPT quốc gia, kì thi học sinh giỏi, Olimpic khu vực và quốc tế thì các bài toán liên quan đến phép tính lượng giác thường ẩn dưới hình thức là công cụ giải toán. Nhiều bài toán liên quan đến ước lượng và tính toán các tổng, tích cũng như các bài toán cực trị thường có mối quan hệ ít nhiều đến lượng giác.

Lượng giác và các bài toán liên quan được đề cập ở hầu hết các giáo trình lượng giác cơ bản. Tuy nhiên, việc dạy toán lượng giác THPT chưa chi tiết, có nhiều kiến thức chưa được cập nhật một cách hệ thống. Các tài liệu về phương pháp lượng giác như là một chuyên đề chọn lọc cho giáo viên và học sinh chưa có nhiều (xem [1]-[6]).

Với mong muốn nâng cao trình độ chuyên môn đáp ứng nhu cầu học sinh giỏi nên em chọn đề tài “Một số phương pháp lượng giác ước lượng trong đa thức và dãy số” để làm đề tài luận văn thạc sĩ của mình.

Chuyên đề lượng giác với mảng kiến thức "phương pháp lượng giác trong ước lượng đa thức và dãy số" sẽ giúp các em học sinh tự tin giải quyết tốt các bài toán liên quan đến lượng giác và thêm yêu toán học hơn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Giáo sư, Tiến sĩ khoa học Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người thầy

hướng dẫn khoa học của mình, thầy đã dành nhiều thời gian, tâm huyết hướng dẫn, truyền đạt và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán -Tin, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu. Đồng thời tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K8B (khóa 2014-2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm và gia đình đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả luận văn

Trần Thị Hồng Khuyên

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TRỢ

1.1 Một số tính chất của hàm lượng giác

Trong phần này ta xét một số tính chất cơ bản của hàm lượng giác trên trục thực.

Ta có

$$\sin x; \cos x \in [-1;1]; \ \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$\sin(x + k2\pi) = \sin x; \ \ \cos(x + k2\pi) = \cos x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$\tan(x + k\pi) = \tan : x, \ \ \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \ \ \cot(x + k\pi) = \cot x, \ \ \forall x \neq k\pi.$$

Công thức góc nhân đôi

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Công thức góc nhân ba

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Công thức góc nhân năm

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha, \ \ \sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

Về sau, ta sử dụng các hệ thức

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}), \ \ -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ \ \text{và} \ \ \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}.$$

Ta có

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

và

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}); \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

.

+ Nếu $C := \alpha \sin x + \beta \cos x$ thì $-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq C \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $D := \cos^n x + \sin^n x$ thì ta có $-1 \leq D \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1.2 Đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.2.1 (xem[6])**.** Hàm số dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

trong đó a_n và b_n không đồng thời bằng không (tức là $a_n^2 + b_n^2 > 0$), $a_i; b_j \in \mathbb{R}$ với $i = 0, 1, \ldots, n$ $j = 1, 2, \ldots, n$, được gọi là đa thức lượng giác bậc n ($n \in \mathbb{N}$).

Khi tất cả $b_j = 0$ với $j = 1, 2, \ldots, n$, ta nhận được biểu thức không chứa hàm sin.

Định nghĩa 1.2.2. Hàm số dạng

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx$$

được gọi là đa thức lượng giác bậc n theo cosin.

Tương tự, khi tất cả $a_i = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, n$, ta nhận được biểu thức không chứa hàm cosin.

Định nghĩa 1.2.3. Hàm số dạng

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx$$

được gọi là đa thức bậc n theo sin.

Sau đây, ta liệt kê các tính chất đơn giản của đa thức lượng giác.

Tính chất 1.2.4. Tổng của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $\max\{m; n\}$.

Tính chất 1.2.5. Tích của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc bằng $n+m$.

Tính chất 1.2.6. Nếu đa thức lượng giác

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

đồng nhất bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì tất cả các hệ số của nó đều bằng 0, tức là

$$a_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_n = b_n = 0.$$

Tính chất 1.2.7. Đối với mọi đa thức lượng giác dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

luôn tìm được các đa thức đại số $P_n(t)$; $Q_{n-1}(t)$ sao cho

$$A_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 1.2.8. Đối với đa thức lượng giác bậc n $(n \geq 1)$ dạng

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx$$

luôn tồn tại đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$, sao cho

$$S_n(x) = b_0 + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 1.2.9. Đối với đa thức lượng giác bậc n $(n \geq 1)$ theo cosin

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx$$

luôn tồn tại đa thức đại số $P_n(t)$ với hệ số cao nhất bằng $a_n 2^{n-1}$ sao cho $C_n(x) = p_n(\cos x)$.

Ngược lại, với mọi đa thức đại số $P_n(t)$ với hệ số bậc cao nhất bằng 1, qua phép đặt ẩn phụ $t = \cos x$ đều biến đổi được về dạng $C_n(x)$ với $a_n = 2^{1-n}$.

1.3 Đa thức Chebyshev

Trong phần này ta xét một số tính chất cơ bản của đa thức Chebyshev loại 1 và loại 2 (xem [6]).

Định nghĩa 1.3.1 (Đa thức Chebyshev loại 1)**.** Các đa thức $T_n(x)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} T_0(x) = 1;\, T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)\,,\, n \geq 1 \end{cases}$$

được gọi là đa thức Chebyshev loại 1.

Định nghĩa 1.3.2 (Đa thức Chebyshev loại 2)**.** Các đa thức $U_n(x)$ được xác định bởi: $\begin{cases} U_0(x) = 1;\, U_1(x) = 2x \\ U_{n+1}(x) = 2x.U_n(x) - U_{n-1}(x)\,,\, n \geq 1 \end{cases}$ được gọi là đa thức Chebyshev loại 2.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta dễ dàng chứng minh được

$$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha, \ \ \forall\alpha \in \mathbb{R}, \ \ \forall k \in \mathbb{Z};$$

$$U_n(\cos\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}, \ \ \forall\alpha \neq k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Tính chất 1.3.3. Ta có

$$T_n(x) = \cos(n\mathrm{arccos}x)\,, \ \ \forall x \in [-1;1]$$

và

$$U_n(x) = \frac{\sin(n\mathrm{arccos}x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ \forall x \in (-1;1)\,.$$

Tính chất 1.3.4. Đa thức $T_n(x)\,, U_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có bậc là n và hệ số cao nhất tương ứng là 2^{n-1} và 2^n.

Tính chất 1.3.5. Các đa thức $T_n(x)\,,\, U_n(x)$ là các hàm số chẵn khi n chẵn và là các hàm số lẻ khi n lẻ.

Tính chất 1.3.6. Các đa thức $T_n(x)$ và $U_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt tương ứng là:

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = \overline{0; n-1} \ \text{và} \cos\frac{k\pi}{n+1}, k = \overline{1, n}$$

.

Chứng minh. Do $x \in [-1;1]$ nên ta đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0;\pi]$.

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*.$$